Domácí úkol ze cvičení 9:

Příklady a problémky k promyšlení:

1. Dokažte, nebo ukažte, že neplatí, tvrzení:
   Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající (resp. nerostoucí) a vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$ má limitu a, ($a \in R$ nebo $a = \infty$ (resp. $a = -\infty$), pak také $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

   Odtud snadno např.: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n = e^2$.

2. Limita rekurentně zadané posloupnosti (užití věty o limitě monotónní posloupnosti):

   (i) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$ $\quad$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$) ;

   (ii) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $\quad$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$) ;

   (iii) $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{a_n}$ $\quad$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$) .

   (!! Je třeba ukázat, že daná posloupnost konverguje – ukažte si na „výpočtu" limity rekurentně dané posloupnosti $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (-1)a_n$, pokud budete jen „počítat" s tím, že posloupnost limitu má.)

3. Konvergence řad s nezápornými členy:

   (i) Pokuste se sečíst řadu (nebo ukažte, že řada diverguje) :

   $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-3n} \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n}) \ .$$

   (ii) Rozhodněte o konvergenci , resp. divergenci, řady (užijte vhodné kriterium) :

   a) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n^2+3} \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n^2-1} \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n+1} \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2 \ ;$$

   b) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{4^n} \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n} \ .$$